

#### 1) La fonction exponentielle :

##### Définition :

La fonction exponentielle, notée  $\exp$ , est l'unique fonction définie et dérivable sur  $\mathbf{R}$ , telle que :  
 $\exp' = \exp$  et  $\exp(0) = 1$ .

##### Propriété 1 :

Pour tout  $x, y \in \mathbf{R}$  :

1.  $\exp(x) > 0$

2.  $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$

3.  $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$

4.  $\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$

5. Pour tout  $x \in \mathbf{R}$  et  $n \in \mathbf{Z}$  :  $\exp(nx) = (\exp x)^n$ .

##### Notations :

On note **e** le nombre  $\exp(1)$ .

##### Propriété 2 :

La fonction exponentielle est strictement croissante sur  $\mathbf{R}$ .

En particulier pour  $x$  et  $y$  réels :  
 $\exp(x) = \exp(y) \Leftrightarrow x = y$   
 $\exp(x) < \exp(y) \Leftrightarrow x < y$

[Exercice 1](#)

##### Propriété 4 :

•  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$

•  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$

[Exercice 2](#)

#### 2) La fonction logarithme :

##### Propriété 5 :

- La fonction  $\ln$  est définie sur  $]0, +\infty[$ .
- $\ln(1) = 0$  et  $\ln(e) = 1$ .
- Pour tout  $a \in \mathbf{R}$ , et pour tout  $b \in ]0, +\infty[$  :  $b = \exp(a) \Leftrightarrow a = \ln(b)$ .

[Exercice 3](#)

##### Propriété :

Soient  $a, b \in ]0, +\infty[$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ .

1.  $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ .

2.  $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$ .

3.  $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

4.  $\ln(a^n) = n \ln(a)$

5.  $\ln(\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n} \ln(a)$

[Exercices 4 & 5](#)

**Propriété 6 :**

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$

**Exercice 6**

**Propriété :**

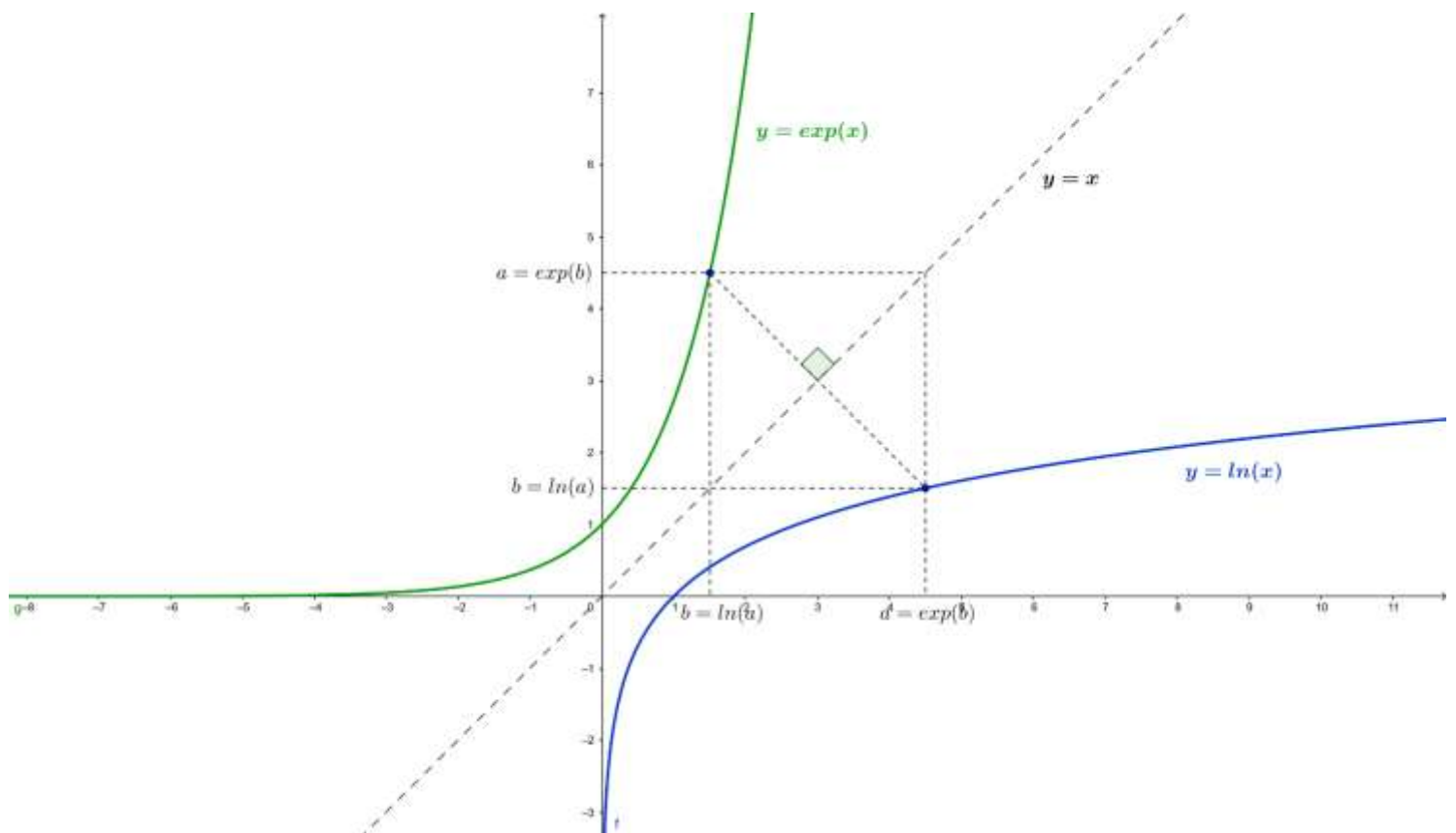
La fonction  $\ln : x \mapsto \ln(x)$  est définie et dérivable sur  $]0 ; +\infty[ : (\ln)'(x) = \frac{1}{x}$ .

**Exercice 7**

**Propriété :**

La fonction  $\ln$  est strictement croissante sur  $]0 ; +\infty[$ .

**Exercices 8 & 9**



### 3 - EXP & LN - EXERCICES

**Temps indicatif à consacrer aux exercices : 6 à 9h.**

### Exercice 1 :

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbf{R}$  par :  $f(x) = \exp(x) - 1 - x$ .

1. Calculer  $f'(x)$  ; étudier son signe et en déduire le sens de variation de  $f$ .
2.
  - a. Calculer  $f(0)$ . En déduire le signe de  $f$ .
  - b. Justifier que pour tout  $x \geq 0$  :  $\exp(x) \geq x + 1$  et en déduire :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x)$ .
  - c. Déterminer :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x)$ . (On pourra poser  $X = -x$ ).

### Exercice 2 :

Préciser l'ensemble de définition de la fonction  $f$ .

Etudier les limites de la fonction  $f$  aux bornes de cet ensemble.

$$1. f(x) = \frac{\exp(x) - 2}{\exp(x) + 1}.$$

$$2. f(x) = \frac{1}{1 - \exp(x)}.$$

### Exercice 3 :

Résoudre les équations suivantes :

**a.**  $\exp(x) = 4$

**b.**  $\exp(2x - 1) = 2$

**c.**  $\exp(-x) = 5$

**d.**  $\exp(-x + 1) = -1$

e.  $\ln(x + 1) = 0$

**f.**  $\ln(1 - x) = 1$

**g.**  $\ln(2 - 3x) = \ln 4$

### h. $\ln(4x) = \ln(x - 3)$

😊 On commencera par déterminer l'ensemble de définition de chaque équation.

### Exercice 4 :

Exprimer les réels suivants en fonction de  $\ln(2)$  :  $a = \ln(8)$ ,  $b = \ln(\frac{1}{4})$ ,  $c = \ln(16) - 3 \ln(2)$ ,  $d = \ln(2\sqrt{2})$ ,

### Exercice 5 :

Résoudre dans  $\mathbf{R}$  l'équation suivante :  $\ln(x + 7) = 2 \ln(x + 1)$ .

😊 On commencera par déterminer l'ensemble de définition de cette équation.

### Exercice 6 :

1. Calculer les limites suivantes :    **a.**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - \ln(x))$                       **b.**  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x}$

2. Déterminer les ensembles de définition des fonctions ci-dessous :

**a.**  $f(x) = \frac{1}{x} - \ln(x)$

**b.**  $f(x) = \frac{1}{\ln x}$

Puis calculer les limites de ces fonctions aux bornes de leurs ensembles de définition.

### Exercice 7 :

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :      **a.**  $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$       **b.**  $f(x) = (\ln x)^2$

### Exercice 8 :

Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = 3 - 2x - \ln(x)$ .

Etudier la fonction  $f$  sur son ensemble de définition que l'on déterminera. Dresser son tableau de variations.

### Exercice 9 :

$x$  et  $n$  sont respectivement des inconnues réelle et entière. Résoudre les inéquations suivantes :

**a.**  $\ln(x) \geq 3$

**b.**  $\exp(x + 3) < 2$

**c.**  $\ln(2x) - 1 \leq 0$

**d.**  $3^n \geq 10^6$

**e.**  $0,7^n \leq 10^{-4}$